Lösung

Lösung zu Aufgabe 1

Um die gemeinsamen Punkte der Ebenen E_1 und E_2 zu ermitteln, wird das folgende Gleichungssystem gelöst:

$$\begin{array}{rcccl} \text{I}: & x & & +2z & = & 1 \\ \text{II}: & & y & +3z & = & 1 \end{array}$$

Wird dieses Gleichungssystem in Matrixschreibweise notiert, lässt sich die Lösung einfach ablesen:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Aus der letzten Zeile dieser erweiterten Koeffizientenmatrix folgt, dass z frei wählbar ist (die Gleichung $0z = 0$ ist für $z \in \mathbb{R}$ erfüllt). Wir wählen also $z = t$ und bestimmen die Lösung des Gleichungssystems in Abhängigkeit von Parameter t:

$$\begin{array}{cccccc} x & & & = & 1 & -2t \\ & y & & = & 1 & -3t \\ & & z & = & & t \end{array}$$

Diese Lösung des Gleichungssystems in Abhängigkeit von t lässt sich als Vektor schreiben:

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \ t \in \mathbb{R}$$

Ziel der Aufgabe war es, die gemeinsamen Punkte der Ebenen E_1 und E_2 zu bestimmen. Aus dem Ergebnis folgt, dass die beiden Ebenen sich in der Gerade g schneiden.

Um die besondere Lage der beiden gegebenen Ebenen beschreiben zu können, betrachten wir die Ebenengleichungen in Koordinatenform etwas genauer:

$$\begin{array}{rcccl} E_1: & x & & +2z & = & 1 \\ E_2: & & y & +3z & = & 1 \end{array}$$

Während in E_1 keine y-Koordinate vorkommt, enthält die Koordinatendarstellung von E_2 keine x-Koordinate. Das Fehlen einer Koordinate in der Koordinatenform bedeutet immer, dass die Ebene mit der entsprechenden Achse keinen Schnittpunkt hat, im konkreten Fall verläuft also E_1 parallel zur y-Achse, E_2 verläuft parallel zur x-Achse.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Es soll die Menge aller Punkte bestimmt werden, die bei der Abbildung durch die gegebene Matrix A auf sich selbst abgebildet werden. Es muss also die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Gleichung (1) führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{I}: & x & & +2z & = & x \\ \mathrm{II}: & & y & +3z & = & y \\ \mathrm{III}: & & & 0 & = & z, \end{array}$$

das durch $\{(x \mid y \mid 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ gelöst wird. Alle Punkte der xy-Koordinatenebene werden also durch Abbildung A auf sich selbst abgebildet.

Wir betrachten die Abbildung der xy-Ebene durch Abbildung B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+0+0 \\ 0+y+0 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auch durch Abbildung B wird die xy-Ebene demnach auf sich selbst abgebildet.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Alle Punkte, die durch Matrix A auf den Ursprung abgebildet werden, genügen der folgenden Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{I}: & x & & +2z & = & 0 \\ \mathrm{II}: & & y & +3z & = & 0 \\ \mathrm{III}: & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Mit $z = s$ ergibt sich für die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems die Ursprungsgerade

$$h : \overrightarrow{X} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ +1 \end{pmatrix} ; r \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Alle Punkte auf dieser Geraden werden durch Abbildung A auf den Ursprung abgebildet. Man nennt die Menge der Punkte, die durch eine Abbildung auf den Ursprung abgebildet werden, den Kern dieser Abbildung.

Die Richtungsvektoren der Geraden h und der Schnittgeraden der beiden Ebenen aus Aufgabe 1 sind identisch, die beiden Geraden verlaufen also parallel zueinander.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Die Matrix A kann keine Inverse besitzen: Matrizen sind nur dann invertierbar, wenn die durch sie beschriebene lineare Abbildung eindeutig umkehrbar ist. Da mit der in (2) beschriebenen Geraden unendlich viele Punkte durch Abbildung A auf den selben Bildpunkt $O\,(0 \mid 0 \mid 0)$ abgebildet werden, kann umgekehrt der Ursprung keinem eindeutigen Urbild zugeordnet werden. Die Abbildung ist daher nicht eindeutig umkehrbar, A kann keine Inverse besitzen.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Um zu zeigen, dass Matrix A eine Projektion beschreibt, muss gezeigt werden, dass die Matrix der Bedingung $M^2 = M$ genügt:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1+0+0 & 0+0+0 & 2+0+0\\0+0+0 & 0+1+0 & 0+3+0\\0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Die Abbildung durch die Matrix A ist also eine Projektion. Das bedeutet, dass jeder Punkt des $\mathbb{R}^3$ entlang einer festen Richtung auf eine Ebene abgebildet wird.

In Teilaufgabe 2.1 wurde gezeigt, dass die xy-Ebene durch A auf sich selbst abgebildet wird, sie entspricht also der Projektionsebene der Abbildung, da ja alle Punkte, die bereits in der Projektionsebene liegen, nicht mehr weiter abgebildet werden.
Außerdem wurde in Teilaufgabe 2.2 gezeigt, dass alle Punkte, die auf der Geraden h liegen, dem Kern der Abbildung entsprechen, also auf den Ursprung abgebildet werden. Da der Ursprung ein fester Punkt ist und alle Punkte auf h auf den gleichen Bildpunkt $O(0 \mid 0 \mid 0)$ abgebildet werden, entspricht h gerade der Richtung der Projektion.

Die Matrix A beschreibt also eine Projektion entlang h in die xy-Koordinatenebene.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Die Matrix C soll eine Inverse besitzen, damit ist $C \cdot C^{-1} = E$, wobei E die Einheitsmatrix darstellt, außerdem ist $C^2 = C$. Es soll gezeigt werden, dass $C = E$ gilt:

$$C = C \cdot E = C \cdot \underbrace{C \cdot C^{-1}}_{=E} = C^2 \cdot C^{-1} = C \cdot C^{-1} = E$$

Zur geometrischen Begründung des Sachverhalts überlegen wir: C ist eine Abbildung, die jeden Punkt X auf einen Bildpunkt X' abbildet. Da es sich bei C um eine Projektion handelt, wird dieser Bildpunkt durch jede weitere Abbildung mit C nicht weiter verändert, er liegt bereits in der Projektionsebene und wird dadurch auf sich selbst abgebildet:

$$X \ \xrightarrow{C} \ X' \ \xrightarrow{C} \ X' \tag{3}$$

Da Abbildung C invertierbar ist, muss sie umkehrbar eindeutig (bijektiv) sein. Eine Voraussetzung dafür ist, dass durch die ursprüngliche Abbildung C jedes Bild der Bildmenge nur ein einziges Mal angenommen wird, es dürfen also durch C keine zwei Urbilder auf das gleiche Bild abgebildet werden. Aus (3) folgt aber:

$$\begin{aligned} X \ &\xrightarrow{C} \ X' \qquad \text{und} \\ X' \ &\xrightarrow{C} \ X' \end{aligned}$$

Sowohl das Urbild X als auch das Urbild X' werden auf das Bild X' abgebildet. Dies ist nur dann kein Widerspruch zu der Forderung dass C umkehrbar ist, wenn $X = X'$ gilt und damit C jedes X auf sich selbst abbildet. Damit muss $C = E$ gelten.